Progetto DIM-BOT – parte 3

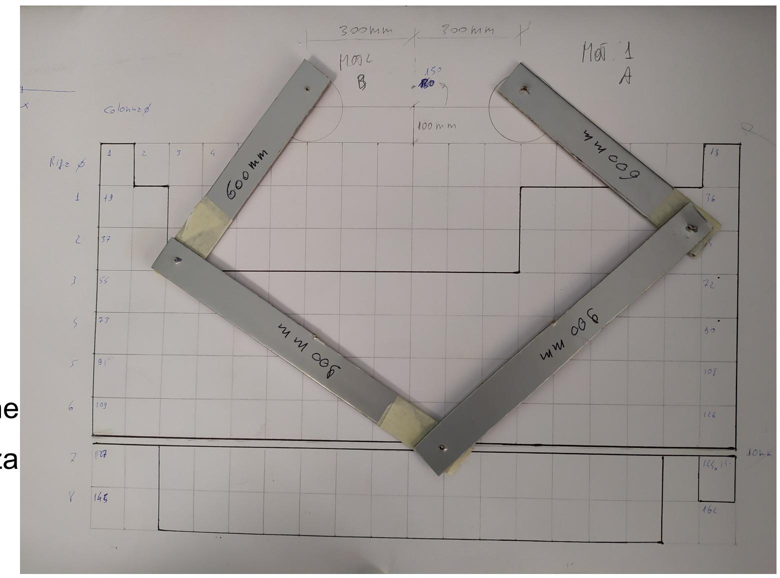
MODELLO DEL SISTEMA ED ANALISI DEI PROBLEMI

Per analizzare tutti i problemi della geometria scelta applicata al nostro manipolatore, il primo passo da fare è realizzare un modello. Questo può avvenire in due modi, o in maniera cartacea, o tramite appositi CAD per il disegno meccanico.

Dipende un po' anche dalle abitudini personali, e personalmente a me piace toccare con mano, anche se per chi ha dimestichezza con i CAD forse vale l'esatto contrario.

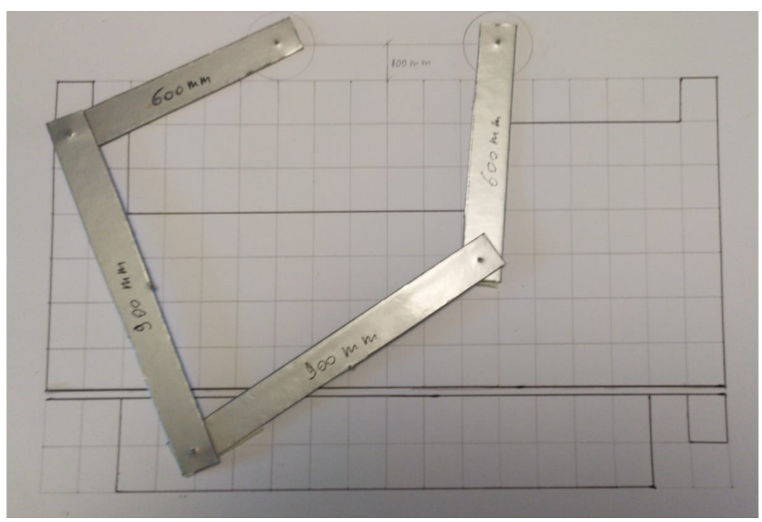
Comunque sia, vista anche la poca complessità di un sistema che essenzialmente si muove su un piano, ho preferito dotarmi dell'occorrente per il disegno e realizzare un piccolo modellino in scala del sistema.

In questo modo ho verificato come si comportano gli assi durante il loro spostamento sul piano, ed ho controllato le possibili collisioni e/o posizioni particolari.

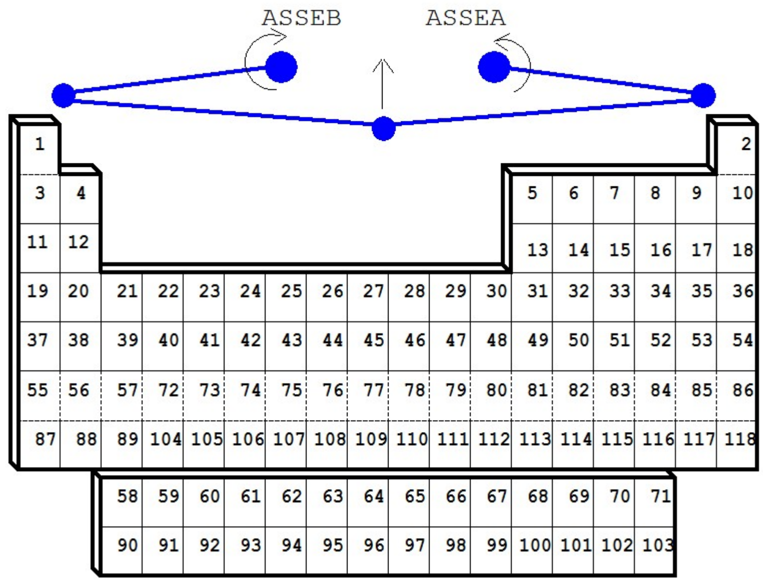


Questo metodo, anche se un po' artigianale, mi ha aiutato molto per la scelta della posizione dei due motori, e per la scelta della lunghezza dei bracci.

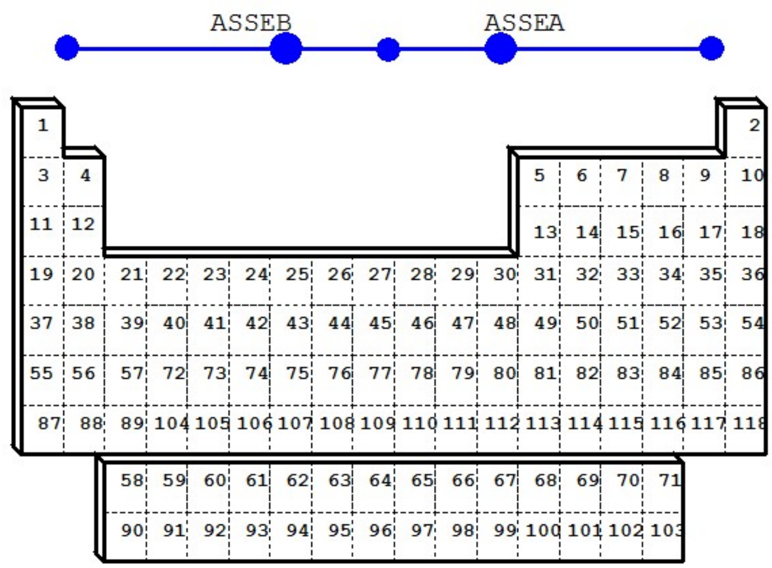
Con i modello ho inoltre potuto verificare il calcolo degli angoli dei due motori, ottenuto dalle formule che vedremo più avanti.



Il punto di azzeramento del sistema è quello con i bracci perfettamente orizzontali, e si ottiene ruotando i due motori nei versi indicati nella figura.

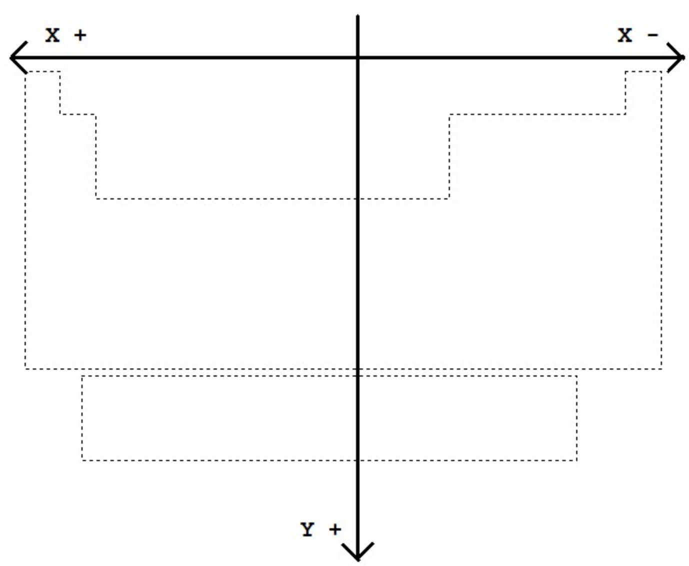


La posizione di zero non può mai essere oltrepassata andando verso in alto. Il manipolatore raggiungerà questa posizione durante l'azzeramento, e se vogliamo controllare la corretta posizione del manipolatore dopo ogni deposito, possiamo prevedere un sensore che rilevi questa posizione, che verrà così raggiunta e controllata dopo ogni deposito.



Analizzando il modello possiamo considerare il seguente sistema cartesiano.

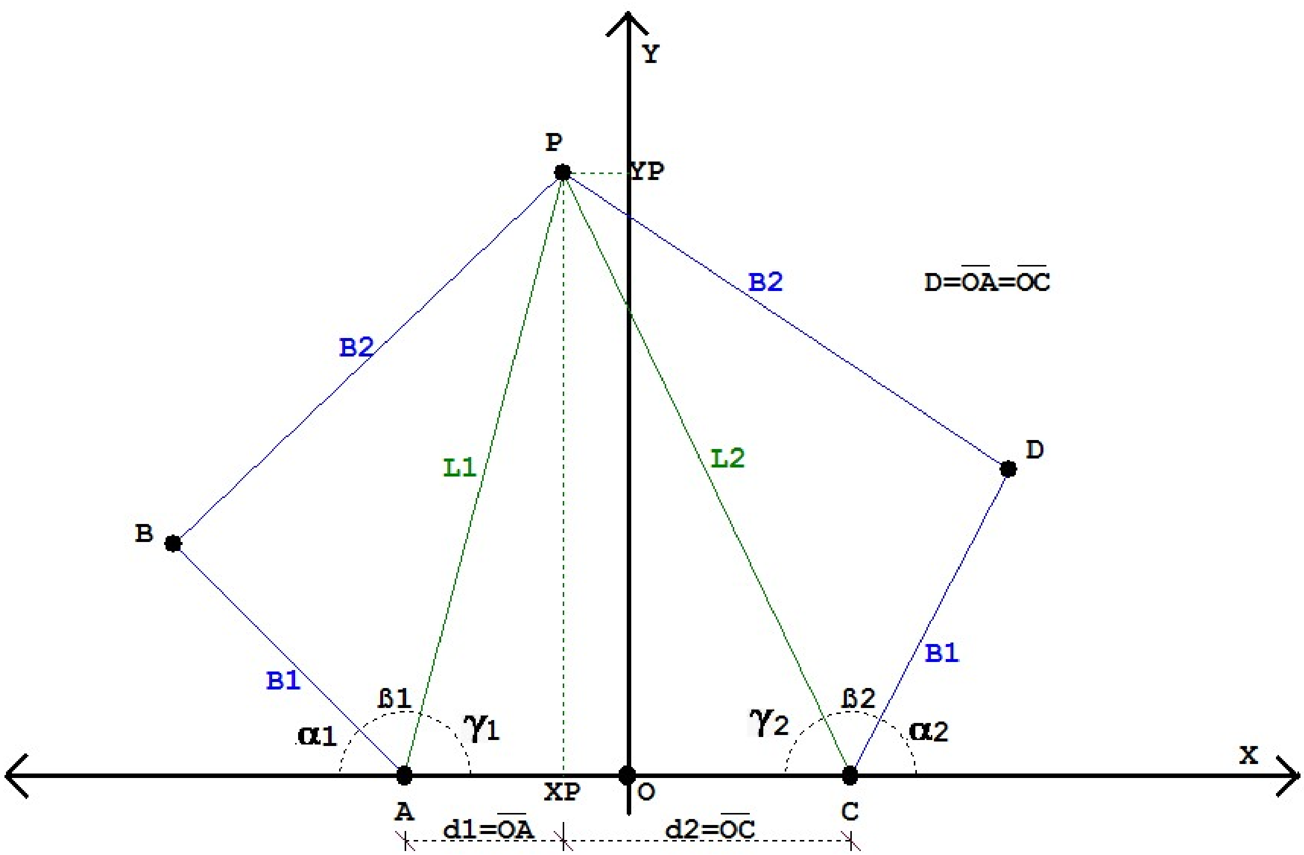
E su questo sistema effettueremo di seguito tutti i ragionamenti geometrici e matematici necessari per trovare le formule cinematiche dirette ed inverse.



FORWARD AND REVERSE KINEMATICS

Le formule per la cinematica diretta (forward kinematics) sono quelle che consentono di ottenere le coordinate cartesiane del punto partendo dagli angoli, viceversa quelle per la cinematica inversa (reverse kinematcs) sono quelle che ci consentono di ottenere gli angoli dalle coordinate cartesiane.

Per studiare questa geometria, capovolgiamo il sistema disponendolo nel classico piano cartesiano.
Il punto **P** è il punto finale e le sue coordinate sono **Xp**, ed **Yp**.
I punti **A** e **C** sono i centri di rotazione dei due motori, **B1** e **B2** sono i due bracci del manipolatore.
L1 ed **L2** sono le distanze dal punto P ai due centri di rotazione dei due motori.
L'angolo α rappresenta il valore di cui deve ruotare il motore rispetto allo zero (posizone del braccio in orizzontale).



I passaggi per il calcolo dei due angoli α1 e α2, partendo dalle coordinate del punto, sono i seguenti:

1) Calcolo dell’angolo ɣ1

se Xp ≥ -D (a destra del punto A)	Se Xp < -D (a sinistra del punto A)
$d1 = D + Xp$ $L1 = \sqrt{Yp^2 + d1^2}$ $\gamma 1 = \arcsin(\frac{Yp}{L1})$	$d1 = -(D + Xp)$ $L1 = \sqrt{Yp^2 + d1^2}$ $\gamma 1 = 180° - \arcsin(\frac{Yp}{L1})$

2) Calcolo dell’angolo ɣ2

se Xp ≤ D (a sinistra del punto C)	Se Xp > D (a destra del punto C)
$d2 = D - Xp$ $L2 = \sqrt{Yp^2 + d2^2}$ $\gamma 1 = \arcsin(\frac{Yp}{L2})$	$d1 = xP - D$ $L1 = \sqrt{Yp^2 + d2^2}$ $\gamma 2 = 180° - \arcsin(\frac{Yp}{L2})$

3) Calcolo dell’angolo β1, si applica il teorema di **Carnot** al **triangolo BAP**.

$$B2^2 = B1^2 + L1^2 - 2 * B1 * L1 * \cos(\beta 1)$$

dall’equazione precedente si ricava β1:

$$\beta 1 = \arcsin(\frac{B1^2 + L1^2 - B2^2}{2 * B1 * L1})$$

4) Calcolo dell’angolo β2, si applica il teorema di **Carnot** al **triangolo DCP**

$$B2^2 = B1^2 + L2^2 - 2 * B1 * L2 * \cos(\beta 2)$$

dall’equazione precedente si ricava β2:

$$\beta 2 = \arcsin(\frac{B1^2 + L2^2 - B2^2}{2 * B1 * L2})$$

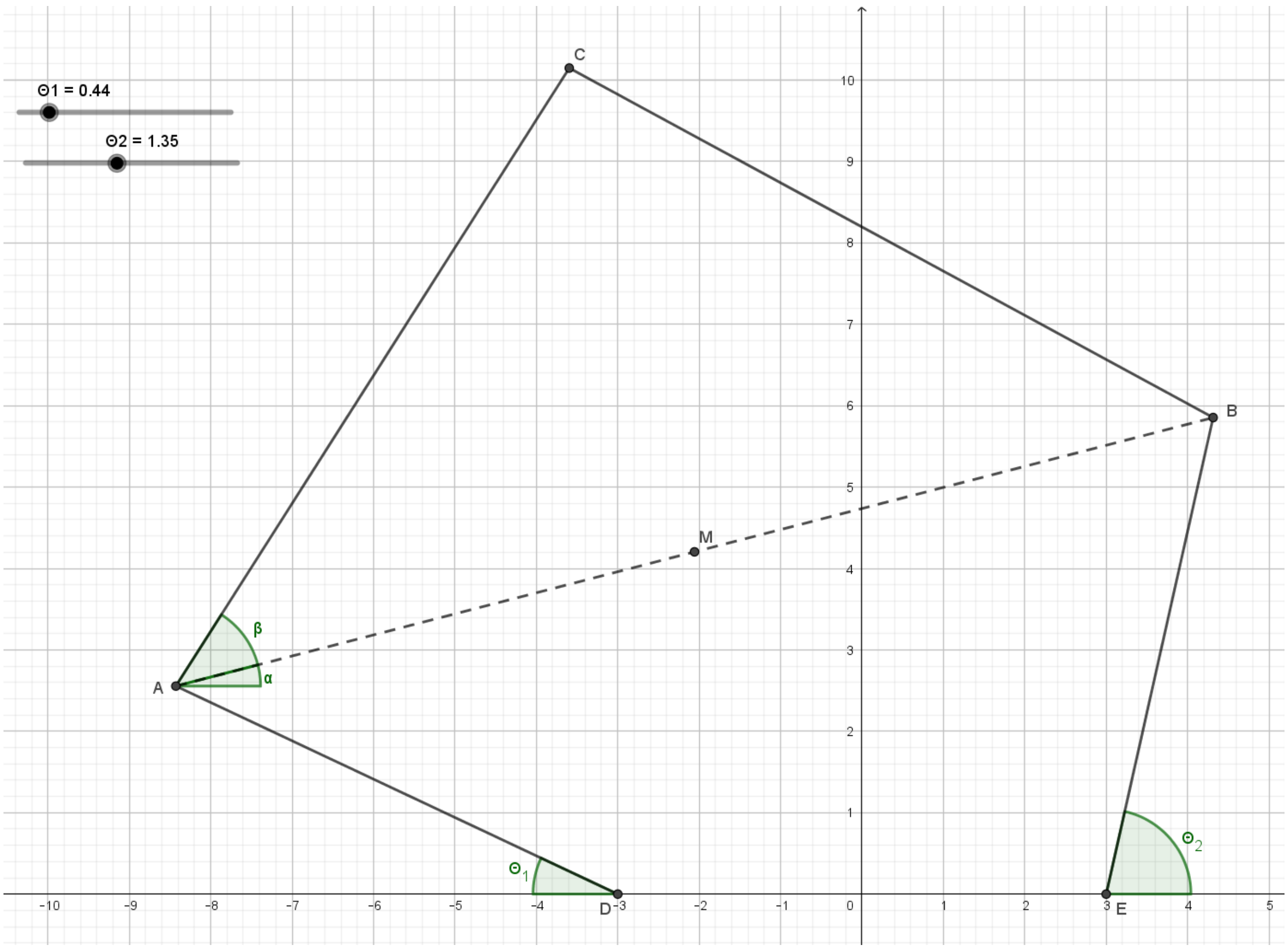
5) Calcolo degli angoli α1 e α2

$$\alpha 1 = 180° - \beta 1 - \gamma 1 \qquad \alpha 2 = 180° - \beta 2 - \gamma 2$$

Per verificare la correttezza delle formule, sono state poi riprodotte sul piano cartesiano le varie casistiche, verificando in ogni caso l’ottenimento di giusti valori.

La formula diretta non ci serve ai fini del funzionamento del robot, ma ci è molto utile per verificare la risoluzione del punto finale.
Per questa parte ho avuto il prezioso supporto del collega Prof. Marco Morelli di Matematica, che mi ha gentilmente aiutato in questa parte.

Di seguito il grafico sul piano cartesiano utilizzato, ed il procedimento.



Siano

$L = 6$
$l = 6$
$d = 9$

I punti fissi D ed E sono a distanza L.

Sia in D che in E sono fissati due bracci lunghi l, liberi di ruotare.

Dagli estremi A e B di tali bracci partono altri due bracci lunghi d che si congiungono nel punto C.

Gli angoli sui quali è possibile agire sono θ_1 e θ_2.

Scelta l'origine del piano cartesiano nel punto medio tra D ed E, i punti A e B hanno le seguenti coordinate:

$$A\left(\frac{-L}{2}-l\cos\theta_1\,,l\sin\theta_1\right)$$

$$B\left(\frac{L}{2}+l\cos\theta_2,l\sin\theta_2\right)$$

La distanza tra i punti A e B è:

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{L}{2}+l\cos\theta_2+\frac{L}{2}+l\cos\theta_1\right)^2+\left(l\sin\theta_2-l\sin\theta_1\right)^2}$$

¿ $\sqrt{\left(L+l\cos\theta_2+l\cos\theta_1\right)^2+\left(l\sin\theta_2-l\sin\theta_1\right)^2}$

¿ $l\sqrt{\left(\frac{L}{l}+\cos\theta_2+\cos\theta_1\right)^2+\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)^2}$

¿ $l\sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2+2+2\frac{L}{l}\cos\theta_1+2\frac{L}{l}\cos\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2}$

¿ $l\sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2+2+2\frac{L}{l}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)+2\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)}$

¿ $l\sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2+2+2\frac{L}{l}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)+2\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)}$

Per determinare l'angolo α (inclinazione del segmento AB sull'orizzontale) serve il coefficiente angolare della retta AB:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{l\sin\theta_2-l\sin\theta_1}{\frac{L}{2}+l\cos\theta_2+\frac{L}{2}+l\cos\theta_1}=\frac{l\sin\theta_2-l\sin\theta_1}{L+l\cos\theta_2+l\cos\theta_1}=\frac{\sin\theta_2-\sin\theta_1}{\frac{L}{l}+\cos\theta_2+\cos\theta_1}$$

dunque

$$\alpha=\arctan m_{AB}$$

Infine, l'angolo β si ottiene dal triangolo rettangolo AMC:

$$\beta=\arccos\frac{AM}{d}$$

essendo AM la metà di AB, calcolata prima.

Pertanto le coordinate del punto terminale C risultano:

$$C\left(x_A+d\cos\left(\alpha+\beta\right),\,y_A+d\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

CONCLUSIONI

Come detto in premessa, questo progetto interessa davvero tutte le discipline ed ha un'elevata valenza didattica, a dimostrazione di ciò tutti anche i calcoli effettuati fino ad ora, danno l'idea di come le discipline scientifiche siano importanti nei vari settori tecnologici.